Odpowiedzi do zadań zamkniętych

Nr zadania	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
Odpowiedź	A	C	C	B	C	A	B	C	A	D	B	C	D	B	D	C	A	B	A	A	A	C	B	A	A

Schemat oceniania zadań otwartych

Zadanie 26. (*2 pkt*)

Rozwiąż nierówność $x^2 - 14x + 24 > 0$.

I sposób rozwiązania

Obliczamy pierwiastki trójmianu kwadratowego

- obliczamy wyróżnik trójmianu kwadratowego i pierwiastki tego trójmianu:
  $\Delta = 100$, $x_1 = \frac{14-10}{2} = 2$, $x_2 = \frac{14+10}{2} = 12$

albo

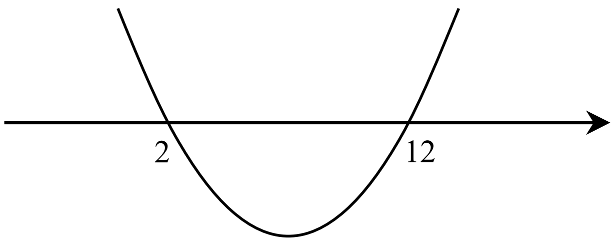
- stosujemy wzory Viète'a:
  $x_1 + x_2 = 14$ oraz $x_1 \cdot x_2 = 24$
  i stąd $x_1 = 2$, $x_2 = 12$

albo

- zapisujemy nierówność w postaci $(x-2)(x-12) > 0$. Lewą stronę nierówności możemy uzyskać np.:
  - grupując wyrazy i wyłączając wspólny czynnik,
  - korzystając z postaci kanonicznej
    $(x-7)^2 - 25 = (x-7+5)\cdot(x-7-5) = (x-2)(x-12)$,
  - podając postać iloczynową

albo

- rysujemy fragment wykresu funkcji kwadratowej z zaznaczonymi miejscami zerowymi



albo

- wskazujemy pierwiastki trójmianu $x_1 = 2$, $x_2 = 12$

Podajemy rozwiązanie nierówności: $x \in (-\infty, 2) \cup (12, \infty)$.

Schemat oceniania I sposobu rozwiązania

Zdający otrzymuje .... 1 pkt

gdy wyznaczy pierwiastki trójmianu kwadratowego lub zapisze trójmian w postaci iloczynowej i na tym poprzestanie lub dalej popełni błędy.

Zdający otrzymuje .... 2 pkt

gdy:

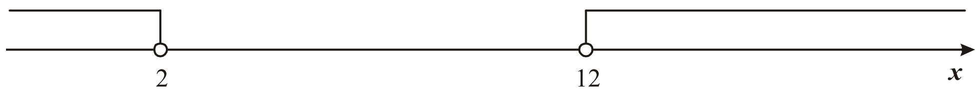
- poda zbiór rozwiązań nierówności w postaci: $x < 2$ lub $x > 12$ lub $x \in (-\infty, 2) \cup (12, \infty)$ lub $(-\infty, 2) \cup (12, \infty)$

albo

- sporządzi ilustrację geometryczną (oś liczbowa, wykres) i zapisze zbiór rozwiązań nierówności w postaci: $x < 2$, $x > 12$

albo

- poda zbiór rozwiązań nierówności w postaci graficznej z poprawnie zaznaczonymi końcami przedziałów:



II sposób rozwiązania

Zapisujemy nierówność w postaci

$(x-7)^2 - 25 > 0$, a następnie

$(x-7)^2 > 5$, a stąd

$|x-7| > 5$, więc $x < 2$ lub $x > 12$.

Schemat oceniania II sposobu rozwiązania

Zdający otrzymuje .... 1 pkt

gdy doprowadzi nierówność do postaci $|x-7| > 5$ i na tym poprzestanie lub dalej popełni błędy

Zdający otrzymuje .... 2 pkt

gdy:

- poda zbiór rozwiązań nierówności w postaci: $x < 2$ lub $x > 12$ lub $x \in (-\infty, 2) \cup (12, \infty)$ lub $(-\infty, 2) \cup (12, \infty)$

albo

- sporządzi ilustrację geometryczną (oś liczbowa, wykres) i zapisze zbiór rozwiązań nierówności w postaci: $x < 2$, $x > 12$

albo

- poda zbiór rozwiązań nierówności w postaci graficznej z poprawnie zaznaczonymi końcami przedziałów:

Uwagi:

1. Przyznajemy **2 punkty** za rozwiązanie, w którym zdający od razu poda właściwą sumę przedziałów.
2. Przyznajemy **2 punkty** za rozwiązanie, w którym zdający poprawnie obliczy pierwiastki trójmianu $x=2$, $x=12$ i zapisze np.: $x\in(-\infty,-2)\cup(12,\infty)$, popełniając tym samym błąd przy przepisywaniu jednego z pierwiastków.
3. Przyznajemy **1 punkt** za rozwiązanie, w którym zdający popełni błąd w obliczaniu pierwiastków (np. wstawi do wzoru Δ zamiast $\sqrt{\Delta}$, b zamiast $-b$ lub $x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2c}$ zamiast $x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$, popełni błąd stosując wzory Viète'a) i konsekwentnie rozwiąże zadanie do końca.
4. Przyznajemy **0 punktów** zdającemu, który otrzyma niedodatni wyróżnik trójmianu kwadratowego, nawet jeśli konsekwentnie rozwiąże zadanie do końca (rozwiązuje inne zadanie).
5. Przyznajemy **0 punktów** zdającemu, który rozwiązuje nierówność inną niż w treści zadania.
6. W związku z rozbieżnością w rozumieniu i używaniu spójników w języku potocznym i formalnym języku matematyki **akceptujemy zapis**, np. $x\in(-\infty,2)$ i $x\in(12,\infty)$, ale tylko wówczas gdy zapisowi temu towarzyszy poprawna interpretacja geometryczna.

Zadanie 27. (2 punkty)
Rozwiąż równanie $x^3-3x^2+2x-6=0$.

<u>I sposób rozwiązania (grupowanie wyrazów)</u>

Stosując metodę grupowania otrzymujemy:

$x^2(x-3)+2(x-3)=0$ albo $x(x^2+2)-3(x^2+2)=0$ stąd

$(x-3)(x^2+2)=0$, a stąd

$x=3$.

<u>Schemat oceniania I sposobu rozwiązania</u>

Zdający otrzymuje .... 1 pkt
gdy pogrupuje wyrazy do postaci, z której łatwo można doprowadzić do postaci iloczynowej, np.: $x^2(x-3)+2(x-3)=0$ lub $x(x^2+2)-3(x^2+2)=0$ i na tym poprzestanie lub dalej popełnia błędy
Zdający otrzymuje .... 2 pkt
gdy poda rozwiązanie $x=3$.

<u>Uwagi:</u>

1. Jeżeli zdający otrzyma rozwiązanie $x=3$ i poda dodatkowo inne rzeczywiste rozwiązanie, to otrzymuje 1 pkt.

2. Zdający może od razu zapisać rozkład na czynniki. Jeśli na tym poprzestanie lub błędnie poda rozwiązanie równania to otrzymuje 1 pkt.

II sposób rozwiązania (dzielenie)

Sprawdzamy, że $W(3)=3^3-3\cdot 3^2+2\cdot 3-6=0$, więc jednym z pierwiastków tego wielomianu jest $x=3$.
Dzielimy wielomian przez dwumian $x-3$ i otrzymujemy x^2+2. Mamy więc równanie w postaci $(x-3)\cdot(x^2+2)=0$ a stąd otrzymujemy $x=3$.

Schemat oceniania II sposobu rozwiązania

Zdający otrzymuje .... 1 pkt
gdy wykona dzielenie wielomianu przez dwumian $x-3$, otrzyma iloraz x^2+2 i na tym poprzestanie lub dalej popełnia błędy,

Zdający otrzymuje .... 2 pkt
gdy poda rozwiązanie $x=3$.

Zadanie 28. (2 punkty)
Piąty wyraz ciągu arytmetycznego jest równy 26, a suma pięciu początkowych wyrazów tego ciągu jest równa 70. Oblicz pierwszy wyraz tego ciągu.

I sposób rozwiązania
Korzystamy ze wzoru ogólnego ciągu arytmetycznego i wzoru na sumę pięciu początkowych wyrazów tego ciągu i zapisujemy układ równań, np. $\begin{cases} a_1+4r=26 \\ \dfrac{2a_1+4r}{2}\cdot 5=70 \end{cases}$. Rozwiązujemy układ równań i obliczamy a_1:

$$\begin{cases} a_1+4r=26 \\ 2a_1+4r=28 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4r=26-a_1 \\ 2a_1+26-a_1=28 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4r=26-a_1 \\ a_1=2 \end{cases}.$$

II sposób rozwiązania
Korzystamy ze wzoru na sumę pięciu początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego i zapisujemy równanie $\frac{a_1+26}{2}\cdot 5=70$. Następnie obliczamy $a_1=2$.

III sposób rozwiązania
Wypisujemy pięć kolejnych wyrazów ciągu arytmetycznego spełniającego podane warunki: 2, 8, 14, 20, 26, zatem $a_1=2$.

Schemat oceniania I, II i III sposobu rozwiązania

Zdający otrzymuje .... 1 pkt

gdy:

- zapisze układ równań, np. $\begin{cases} a_1 + 4r = 26 \\ \dfrac{2a_1 + 4r}{2} \cdot 5 = 70 \end{cases}$ lub równanie, np. $\dfrac{a_1 + 26}{2} \cdot 5 = 70$ i na tym

  poprzestanie lub dalej popełnia błędy

albo

- błędnie obliczy a_1.

Zdający otrzymuje .... 2 pkt

gdy obliczy $a_1 = 2$.

Uwaga:

1. Jeśli zdający poda tylko $a_1 = 2$ albo $a_1 = 2$ i $r = 6$ to przyznajemy 1 punkt.
2. Zdający otrzymuje 2 punkty, jeżeli wypisze pięć początkowych wyrazów tego ciągu: 2, 8, 14, 20, 26.

Zadanie 29. (2 punkty)

Wyznacz równanie okręgu o środku w punkcie $S = (4,-2)$ i przechodzącego przez punkt $O = (0,0)$.

I sposób rozwiązania (z tw. Pitagorasa)

- zapisujemy równanie okręgu w postaci $(x-4)^2 + (y+2)^2 = r^2$
- zaznaczamy współrzędne środka okręgu w prostokątnym układzie współrzędnych oraz punkt, przez który przechodzi ten okrąg
- obliczamy długość promienia $r = |SO|$:

  $r^2 = 4^2 + 2^2 \qquad r = \sqrt{20}$
- podajemy równanie okręgu w postaci kanonicznej: $(x-4)^2 + (y+2)^2 = 20$ lub ogólnej $x^2 + y^2 - 8x + 4y = 0$.

Schemat oceniania I sposobu rozwiązania

Zdający otrzymuje .... 1 pkt

gdy:

- wykorzysta współrzędne środka i zapisze równanie okręgu w postaci $(x-4)^2 + (y+2)^2 = r^2$ lub $x^2 + y^2 - 8x + 4y + C = 0$ na tym poprzestając albo dalej błędnie interpretuje dane zadania

albo

- wykorzysta fakt, że okrąg przechodzi przez punkt $O=(0,0)$, błędnie wyznaczy długość promienia okręgu np. $r=\sqrt{12}$ i konsekwentnie do tego zapisze równanie $(x-4)^2+(y+2)^2=12$

albo

- błędnie przyjmie, że środkiem okręgu jest punkt $S_1=(-2,4)$ i konsekwentnie do tego zapisze równanie $(x+2)^2+(y-4)^2=20$

albo

- wyznaczy równanie okręgu popełniając błąd rachunkowy.

Zdający otrzymuje .... 2 pkt
gdy:

- zapisze równanie okręgu w postaci kanonicznej $(x-4)^2+(y+2)^2=20$ lub ogólnej $x^2+y^2-8x+4y=0$.

<u>II sposób rozwiązania</u> (odległość między dwoma punktami)

- zapisujemy równanie okręgu w postaci np.: $(x-4)^2+(y+2)^2=r^2$
- obliczamy odległość punktu $O=(0,0)$ od środka okręgu:

  $|OS|=\sqrt{(4-0)^2+(-2-0)^2}=\sqrt{20}$
- podajemy równanie okręgu w postaci kanonicznej: $(x-4)^2+(y+2)^2=20$ lub ogólnej $x^2+y^2-8x+4y=0$.

<u>Schemat oceniania II sposobu rozwiązania</u>

Zdający otrzymuje .... 1 pkt
gdy:

- wykorzysta współrzędne środka i zapisze równanie okręgu w postaci $(x-4)^2+(y+2)^2=r^2$ lub $x^2+y^2-8x+4y+C=0$ na tym poprzestając albo dalej błędnie interpretuje dane z zadania (np. zamiast r^2 może być dowolna liczba dodatnia)

albo

- obliczy długość promienia okręgu korzystając z odległości dwóch punktów np. $|OS|=\sqrt{(4-0)^2+(-2-0)^2}=\sqrt{20}=2\sqrt{5}$ i nie poda równania okręgu lub poda je błędnie np. $(x+4)^2+(y-2)^2=20$

albo

- błędnie przyjmie, że środkiem okręgu jest punkt $S_1=(-2,4)$ i konsekwentnie do tego zapisze równanie $(x+2)^2+(y-4)^2=20$

albo

- wyznaczy równanie okręgu popełniając błąd rachunkowy.

Zdający otrzymuje .... 2 pkt
gdy:

- zapisze równanie okręgu w postaci kanonicznej $(x-4)^2+(y+2)^2=20$ lub ogólnej $x^2+y^2-8x+4y=0$.

Uwaga:
Jeśli zdający zapisze od razu wzór $(x-4)^2+(y+2)^2=20$ to przyznajemy 2 punkty.

Zadanie 30. (2 punkty)
Wykaż, że trójkąt o wierzchołkach $A=(3,8)$, $B=(1,2)$, $C=(6,7)$ jest prostokątny.

I sposób rozwiązania (z tw. Pitagorasa)

- Obliczamy długości boków trójkąta $|AB|=2\sqrt{10}$, $|AC|=\sqrt{10}$, $|BC|=5\sqrt{2}$
- Obliczamy sumę kwadratów dwóch boków trójkąta, np. $|AB|^2+|AC|^2=40+10=50=|BC|^2$

Możemy w takim przypadku wywnioskować, że dane wierzchołki *A*, *B*, *C* są wierzchołkami trójkąta prostokątnego.

Schemat oceniania I sposobu rozwiązania

Zdający otrzymuje .... 1 pkt
gdy
- obliczy długości boków trójkąta *ABC*: $|AB|=\sqrt{40}=2\sqrt{10}, |AC|=\sqrt{10}, |BC|=\sqrt{50}=5\sqrt{2}$

albo
- obliczy długość jednego boku z błędem, a pozostałe poprawnie i konsekwentnie wyciągnie wniosek

Zdający otrzymuje .... 2 pkt
gdy przeprowadzi pełne rozumowanie np.
- obliczy długości boków trójkąta *ABC*: $|AB|=\sqrt{40}=2\sqrt{10}, |AC|=\sqrt{10}, |BC|=\sqrt{50}=5\sqrt{2}$, skorzysta z twierdzenia odwrotnego do twierdzenia Pitagorasa i stwierdzi na tej podstawie, że trójkąt jest prostokątny.

II sposób rozwiązania (współczynniki kierunkowe prostych)
Wyznaczamy współczynniki kierunkowe prostych *AB*, *AC*, *BC*

$$a_{AB}=\frac{2-8}{1-3}=3\ ,\quad a_{AC}=\frac{7-8}{6-3}=-\frac{1}{3}\ ,\quad a_{BC}=\frac{7-2}{6-1}=1$$

Iloczyn współczynników kierunkowych prostych *AB* i *BC* jest równy -1, więc są to proste prostopadłe, a tym samym trójkąt *ABC* jest trójkątem prostokątnym.

Schemat oceniania II sposobu rozwiązania

Zdający otrzymuje .... 1 pkt
gdy
- obliczy współczynniki kierunkowe prostych *AB* i *AC* i na tym poprzestanie

Zdający otrzymuje .... 2 pkt
gdy

- przeprowadzi pełne rozumowanie, np. wyznaczy iloczyn współczynników kierunkowych prostych AB i BC i stwierdzi, że proste są prostopadłe, więc trójkąt jest prostokątny.

III sposób rozwiązania (iloczyn skalarny)

Obliczamy współrzędne wektorów $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ i $\overrightarrow{BC}$: $\overrightarrow{AB}=[-2,-6]$, $\overrightarrow{AC}=[3,-1]$ i $\overrightarrow{BC}=[5,5]$.

Obliczamy iloczyn skalarny wektorów $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=(-2)\cdot 3+(-6)\cdot(-1)=0$.

Jeżeli iloczyn skalarny wektorów równa się zero to wektory są prostopadłe, a tym samym trójkąt ABC jest prostokątny.

Schemat oceniania III sposobu rozwiązania

Zdający otrzymuje .... 1 pkt
gdy
- obliczy współrzędne wektorów $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{AC}$ i na tym poprzestanie.

Zdający otrzymuje .... 2 pkt
gdy
- przeprowadzi pełne rozumowanie wykaże za pomocą wektorów, że trójkąt jest prostokątny.

IV sposób rozwiązania (okrąg opisany na trójkącie prostokątnym)

Obliczamy długości boków trójkąta $|AB|=2\sqrt{10}$, $|AC|=\sqrt{10}$, $|BC|=5\sqrt{2}$.

Jeżeli trójkąt ABC jest prostokątny to środek najdłuższego boku jest środkiem okręgu opisanego na tym trójkącie.

Najdłuższym bokiem trójkąta ABC jest $|BC|$, więc wyznaczamy współrzędne środka odcinka BC: $S=\left(\frac{7}{2},\frac{9}{2}\right)$.

Obliczamy odległość punktu S od wierzchołków A, B, C: $|BS|=|SC|=\frac{5}{2}\sqrt{2}$

$$|AS|=\sqrt{\left(\frac{7}{2}-3\right)^2+\left(\frac{9}{2}-8\right)^2}=\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{49}{4}}=\sqrt{\frac{50}{4}}=\frac{5}{2}\sqrt{2}.$$

Odległość środka odcinka BC jest taka sama od wszystkich wierzchołków trójkąta ABC, więc trójkąt ten jest prostokątny.

Schemat oceniania IV sposobu rozwiązania

Zdający otrzymuje .... 1 pkt
gdy
- obliczy długości boków trójkąta ABC: $|AB|=\sqrt{40}=2\sqrt{10}$, $|AC|=\sqrt{10}$, $|BC|=\sqrt{50}=5\sqrt{2}$

albo
- obliczy długość jednego boku z błędem, a pozostałe poprawnie i konsekwentnie do tego wyciągnie poprawny wniosek

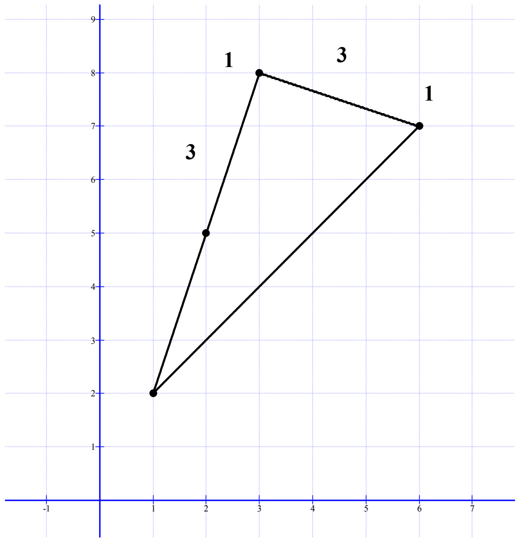
albo

- wyznaczy współrzędne $S=\left(\frac{7}{2},\frac{9}{2}\right)$ środka odcinka BC i obliczy długość odcinka AS.

Zdający otrzymuje .... 2 pkt
gdy przeprowadzi pełne rozumowanie

- wykaże, że BC jest średnicą okręgu opisanego na trójkącie ABC i stwierdzi, że ten trójkąt jest prostokątny

V sposób rozwiązania (graficzny)
Zaznaczamy wierzchołki trójkąta $A=(3,8)$, $B=(1,2)$, $C=(6,7)$



Wykazujemy, że trójkąt jest prostokątny na podstawie dokładnego rysunku w układzie współrzędnych.

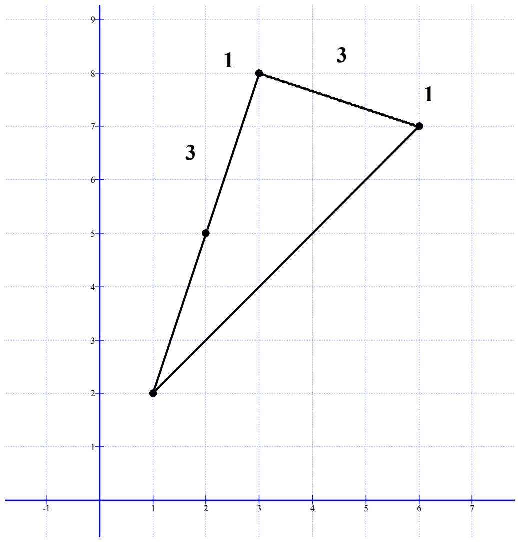
Schemat oceniania V sposobu rozwiązania

Zdający otrzymuje .... 1 pkt
gdy

- na podstawie punktów kratowych poda długości boków trójkąta ABC: $|AB|=\sqrt{40}=2\sqrt{10}$, $|AC|=\sqrt{10}$, $|BC|=\sqrt{50}=5\sqrt{2}$

Zdający otrzymuje .... 2 pkt
gdy przeprowadzi pełne rozumowanie np.

- wykaże, że trójkąt jest prostokątny na podstawie dokładnego rysunku w układzie współrzędnych, np.



Uwaga:
Jeżeli zdający na rysunku jak wyżej wyróżni oprócz wierzchołków tylko punkt kratowy o współrzędnych $(2,5)$ i na tym poprzestanie, to otrzymuje 1 punkt.

Zadanie 31. (2 punkty)

Wykaż, że jeżeli $a>0$ i $b>0$ oraz $\sqrt{a^2+b}=\sqrt{a+b^2}$, to $a=b$ lub $a+b=1$.

Rozwiązanie

Przekształcamy równość zapisaną z treści zadania

$\sqrt{a^2+b}=\sqrt{a+b^2} \quad |(\ )^2$

$a^2+b=a+b^2$

$a^2-b^2+b-a=0$

$(a-b)(a+b)-(a-b)=0$

$(a-b)(a+b-1)=0$

$a-b=0$ lub $a+b-1=0$

$a=b$ lub $a+b=1$

co należało wykazać.

Schemat oceniania

Zdający otrzymuje .... 1 pkt

gdy poprawnie przekształci równość $\sqrt{a^2+b}=\sqrt{a+b^2}$ pozbywając się pierwiastków i w otrzymanej równości zastosuje wzór skróconego mnożenia na różnicę kwadratów, pisząc np.: $(a-b)(a+b)-a+b=0$ i tym poprzestanie lub dalej popełnia błędy.

Zdający otrzymuje .... 2 pkt

gdy przeprowadzi pełne rozumowanie zakończone wnioskiem, że $a=b$ lub $a+b=1$..

Uwaga:

Jeżeli zdający podstawi konkretne wartości w miejsce *a* i *b*, to przyznajemy **0 punktów**.

Zadanie 32. (4 punkty)
Rzucamy dwukrotnie sześcienną kostką do gry. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na tym, że suma liczb oczek otrzymanych na obu kostkach jest większa od 6 i iloczyn tych liczb jest nieparzysty.

I sposób rozwiązania (klasyczna definicja prawdopodobieństwa)
Zdarzeniami elementarnymi są wszystkie pary (x, y) liczb naturalnych ze zbioru $\{1,2,3,4,5,6\}$. Zdarzenia jednoelementowe są równoprawdopodobne, mamy model klasyczny, $|\Omega| = 6 \cdot 6 = 36$.

Oznaczając przez A zdarzenie - suma liczb oczek otrzymanych na obu kostkach jest większa od 6 i iloczyn tych liczb jest nieparzysty, otrzymujemy

$A = \{(5,3),(3,5),(5,5)\}$, $|A| = 3$ i $P(A) = \frac{1}{12}$.

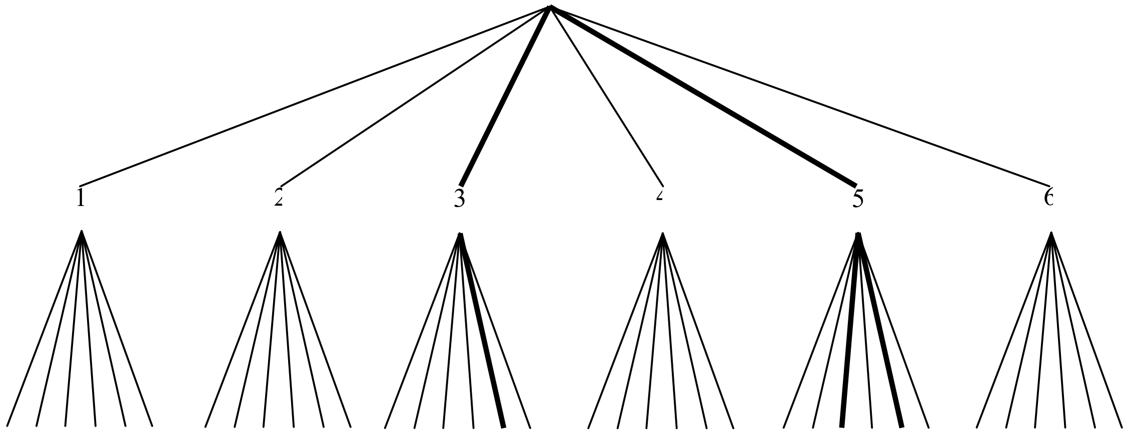
Schemat oceniania I sposobu rozwiązania
Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do całkowitego rozwiązania zadania .... 1 pkt
Zdający zapisze, że $|\Omega| = 36$ albo wypisze wszystkie zdarzenia elementarne sprzyjające zdarzeniu A: $A = \{(5,3),(3,5),(5,5)\}$ i na tym zakończy lub dalej rozwiązuje błędnie.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp .... 2 pkt
Zdający zapisze, że $|\Omega| = 36$ i $A = \{(5,3),(3,5),(5,5)\}$ i na tym zakończy lub dalej rozwiązuje błędnie.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania .... 3 pkt
Zdający zapisze, że $|\Omega| = 36$ i $|A| = 3$ i na tym zakończy lub dalej rozwiązuje błędnie
Rozwiązanie bezbłędne .... 4 pkt
Obliczenie prawdopodobieństwa zdarzenia A: $P(A) = \frac{1}{12}$

Uwaga
Jeśli zdający zapisze, że $P(A) > 1$, to otrzymuje 0 pkt.

II sposób rozwiązania (metoda drzewa)
Rysujemy drzewo dla danego doświadczenia losowego. Prawdopodobieństwo na każdym jego odcinku jest równe $\frac{1}{6}$. Pogrubione gałęzie ilustrują zdarzenie opisane w treści zadania.



Prawdopodobieństwo tego zdarzenia jest równe $\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}+\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}+\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}=\frac{1}{12}$.

Uwaga:
Możemy narysować fragment drzewa - pogrubione gałęzie na rysunku.

Schemat oceniania II sposobu rozwiązania

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do całkowitego rozwiązania zadania .... 1 pkt
Zdający narysuje drzewo i na tym zakończy lub dalej rozwiązuje błędnie.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp .... 2 pkt
Zdający narysuje drzewo, zapisze prawdopodobieństwa na jego gałęziach i na tym zakończy lub dalej rozwiązuje błędnie.
Uwagi:
- Oceniamy rozwiązanie na 0 punktów, gdy w dalszej części rozwiązania zdający dodaje prawdopodobieństwa wzdłuż gałęzi zamiast mnożyć albo mnoży otrzymane iloczyny zamiast dodawać.
- Dopuszcza się błąd w zapisaniu prawdopodobieństwa na jednej gałęzi drzewa (traktujemy jako błąd nieuwagi).
- Jeżeli zdający opisał prawdopodobieństwa tylko na istotnych gałęziach, to kwalifikujemy to do kategorii „pokonanie zasadniczych trudności zadania”.
- Jeżeli zdający narysował „inteligentne drzewo” i opisał prawdopodobieństwa na jego gałęziach, to kwalifikujemy to do kategorii „pokonanie zasadniczych trudności zadania”.
- Jeżeli rozwiązujący popełni błąd rachunkowy lub nieuwagi i na tym zakończy, to otrzymuje 2 punkty.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania .... 3 pkt
- Zdający wskaże na drzewie właściwe gałęzie (np. pogrubienie gałęzi lub zapisanie prawdopodobieństw tylko na istotnych gałęziach).

Rozwiązanie bezbłędne .... 4 pkt
Obliczenie prawdopodobieństwa: $\frac{1}{12}$

III sposób rozwiązania (tabela)

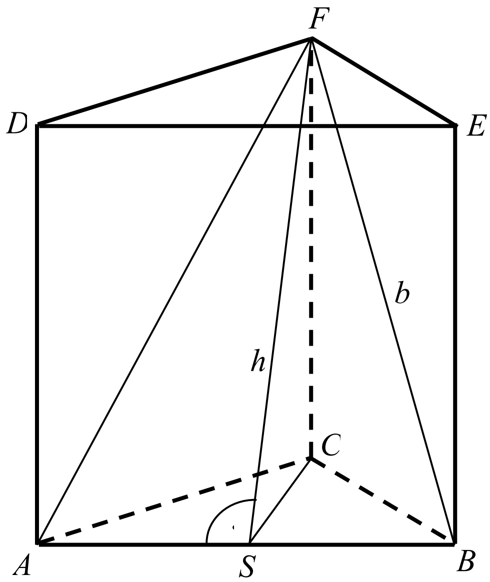
Rysujemy tabelę o wymiarach 6x6, w tabeli jest 36 pól. Zaznaczamy pola sprzyjające zdarzeniu opisanemu w treści zadania i obliczamy prawdopodobieństwo.

Schemat oceniania III sposobu rozwiązania
Tak jak w I sposobie.

Zadanie 33. (4 punkty)
Dany jest graniastosłup prawidłowy trójkątny *ABCDEF* o podstawach *ABC* i *DEF* i krawędziach bocznych *AD*, *BE* i *CF*. Oblicz pole trójkąta *ABF* wiedząc, że $|AB|=10$ i $|CF|=11$. Narysuj ten graniastosłup i zaznacz na nim trójkąt *ABF*.

I sposób rozwiązania
Ze wzoru na wysokość trójkąta równobocznego mamy $|SC|=5\sqrt{3}$. Z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta *SCF* dostajemy $h=\sqrt{11^2+\left(5\sqrt{3}\right)^2}=\sqrt{196}=14$, więc pola trójkąta *ABF* jest równe
$P=\frac{1}{2}\cdot|AB|\cdot h=\frac{1}{2}\cdot 10\cdot 14=70$.

Uwaga 1.
Zamiast obliczać $|SC|=5\sqrt{3}$ możemy również obliczyć z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta *BEF* długość przeciwprostokątnej *BF* tego trójkąta ($b=\sqrt{11^2+10^2}$, $b=\sqrt{221}\approx 14{,}87$), a dalej z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta *SBF* długość odcinka *FS*, czyli *h* ($h=\sqrt{221-25}=\sqrt{196}=14$).



Schemat oceniania
Rozwiązanie, w którym postęp jest wprawdzie niewielki, ale konieczny na drodze do całkowitego rozwiązania zadania .... 1 pkt
Narysowanie graniastosłupa i zaznaczenie na rysunku trójkąta *ABF*.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp .... 2 pkt
- obliczenie wysokości *SC* trójkąta równobocznego *ABC*: $|SC|=5\sqrt{3}$

albo
- obliczenie długości przekątnej ściany bocznej $b=|AF|$: $b=\sqrt{221}$.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania .... 3 pkt
Obliczenie $h=|FS|$ wysokości trójkąta *ABF*: $h=14$.

Zostały pokonane zasadnicze trudności zadania, ale w trakcie ich pokonywania zostały popełnione błędy rachunkowe, usterki .... 2 pkt

Rozwiązanie bezbłędne .... 4 pkt
Obliczenie pola trójkąta *ABF*: $P=70$.

II sposób rozwiązania

1) Narysowanie graniastosłupa i zaznaczenie na rysunku trójkąta *ABF*.
2) Obliczenie $b=|AF|$ (długości przekątnej ściany bocznej) z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta *ACF*: $b=\sqrt{11^2+10^2}$ stąd $b=\sqrt{221}\approx 14,87$.
3) Obliczenie *p* połowy obwodu trójkąta *ABF*: $p=\dfrac{10+2\sqrt{221}}{2}=5+\sqrt{221}$.
4) Obliczenie pola trójkąta *ABF* np. ze wzoru Herona:
$P=\sqrt{\left(\sqrt{221}+5\right)\cdot\left(\sqrt{221}+5-\sqrt{221}\right)^2\cdot\left(\sqrt{221}+5-10\right)}=\sqrt{25\left(\sqrt{221}-5\right)\left(\sqrt{221}+5\right)}$:
$P=70$.

Schemat oceniania

Rozwiązanie, w którym postęp jest wprawdzie niewielki, ale konieczny na drodze do całkowitego rozwiązania zadania .... 1 pkt
Narysowanie graniastosłupa i zaznaczenie na rysunku trójkąta *ABF*.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp .... 2 pkt
Obliczenie długości przekątnej ściany bocznej $b=|AF|$: $b=\sqrt{221}$.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania .... 3 pkt
Obliczenie *p* połowy obwodu trójkąta *ABF*: $p=\sqrt{221}+5$.

Zostały pokonane zasadnicze trudności zadania, ale w trakcie ich pokonywania zostały popełnione błędy rachunkowe, usterki .... 2 pkt

Rozwiązanie bezbłędne .... 4 pkt
Obliczenie pola trójkąta *ABF*: $P=70$.
<u>Uwaga:</u>
Jeżeli zdający zastosuje poprawnie wzór Herona, doprowadzając rozwiązanie do końca, ale w trakcie obliczania pola popełni błąd rachunkowy wcześniej bezbłędnie obliczając połowę obwodu trójkata, to otrzymuje 3 punkty za całe rozwiązanie.

III sposób rozwiązania

1) Narysowanie graniastosłupa i zaznaczenie na rysunku trójkąta *ABF* .
2) Obliczenie $b=|AF|$ (długości przekątnej ściany bocznej) z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta *ACF*: $b=\sqrt{11^2+10^2}$, stąd $b=\sqrt{221}\approx 14,87$.
3) Obliczenie cosinusa kąta *AFB*: $|AB|^2=2b^2-2b^2\cos|\sphericalangle AFB|$,
$100=2\cdot 221-2\cdot 221\cos|\sphericalangle AFB|$ stąd $\cos|\sphericalangle AFB|=\dfrac{171}{221}$
4) Obliczenie sinusa kąta *AFB* $\sin|\sphericalangle AFB|=\sqrt{1-\left(\dfrac{171}{221}\right)^2}$: $\sin|\sphericalangle AFB|=\dfrac{140}{221}$.
5) Obliczenie pola trójkąta *ABF* ze wzoru $P=\dfrac{b^2\sin|\sphericalangle AFB|}{2}$: $P=70$.

Schemat oceniania

Rozwiązanie, w którym postęp jest wprawdzie niewielki, ale konieczny na drodze do całkowitego rozwiązania zadania .... 1 pkt

Narysowanie graniastosłupa i zaznaczenie na rysunku trójkąta *ABF*.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp .... 2 pkt

Obliczenie długości przekątnej ściany bocznej $b = |AF|$: $b = \sqrt{221}$.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania .... 3 pkt

Obliczenie sinusa kąta *AFB*: $\sin|\sphericalangle AFB| = \frac{140}{221}$.

Zostały pokonane zasadnicze trudności zadania, ale w trakcie ich pokonywania zostały popełnione błędy rachunkowe, usterki .... 2 pkt

Rozwiązanie bezbłędne .... 4 pkt

Obliczenie pola trójkąta *ABF*: $P = 70$.

Zadanie 34. (5 punktów)

Kolarz przejechał trasę długości 60 km. Gdyby jechał ze średnią prędkością większą o 1 km/h, to przejechałby tę trasę w czasie o 6 minut krótszym. Oblicz, z jaką średnią prędkością jechał ten kolarz.

Rozwiązanie

Oznaczamy przez v średnią prędkość kolarza, a przez t czas pokonania całej trasy w godzinach.

Z warunków zadania zapisujemy

$$60 = (v+1)(t-0,1) \text{ lub } v+1 = \frac{60}{t-0,1} \text{ lub } t-0,1 = \frac{60}{v+1}$$

Rozwiązujemy układ równań

$$\begin{cases} 60 = v \cdot t \\ 60 = (v+1)(t-0,1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} t = \frac{60}{v} \\ 60 = (v+1)\left(\frac{60}{v} - 0,1\right) \end{cases}$$

$$60 = \frac{60(v+1)}{v} - 0,1(v+1) \Big| \cdot v$$

$$60v = 60v + 60 - 0,1v^2 - 0,1v$$

$$0,1v^2 + 0,1v - 60 = 0 \Big| \cdot 10$$

$$v^2 + v - 600 = 0$$

$$\Delta = 2401$$

$v_1 = 24$ lub $v_2 = -25$

v_2 nie spełnia warunków zadania $(v > 0)$

$$\begin{cases} 60 = v \cdot t \\ v+1 = \frac{60}{t-0,1} \end{cases}$$

$$\begin{cases} v = \frac{60}{t} \\ \frac{60}{t} + 1 = \frac{60}{t-0,1} \end{cases}$$

$$(60+t)(t-0,1) = 60t$$

$$60t + t^2 - 0,1t - 6 = 60t$$

$$t^2 - 0,1t - 6 = 0$$

$$\Delta = 24,01$$

$t_1 = 2,5$ lub $t_2 = -2,4$

t_2 nie spełnia warunków zadania

$$\begin{cases} 60 = v \cdot t \\ t - 0,1 = \frac{60}{v+1} \end{cases}$$

$$\begin{cases} v = \frac{60}{t} \\ t - 0,1 = \frac{60}{\frac{60}{t} + 1} \end{cases}$$

$$(60+t)(t-0,1) = 60t$$

i dalej jak w poprzednim rozwiązaniu.

zadania $(v>0)$ $(t>0)$

Obliczamy

$$v=\frac{60}{2,5}=24$$

<u>**Schemat oceniania**</u>

Rozwiązanie, w którym postęp jest wprawdzie niewielki, ale konieczny na drodze do całkowitego rozwiązania zadania .... 1 pkt

Zapisanie równania w sytuacji domniemanej (*t* oznacza czas pokonania całej trasy w godzinach, a *v* średnią prędkość kolarza w kilometrach na godzinę)

- $60=(v+1)(t-0,1)$

albo

- $v+1=\dfrac{60}{t-0,1}$

albo

- $t-0,1=\dfrac{60}{v+1}$

albo

$v\cdot t=60$

<u>Uwaga</u>

Przyznajemy 0 pkt, jeżeli zdający napisze, że $60=(v+1)(t+0,1)$ lub równoważne (tzn. wg zdającego kolarz jadący szybciej jedzie dłużej).

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp .... 2 pkt

Zapisanie układu równań z niewiadomymi *v* i *t* - odpowiednio z prędkością i czasem

$$\begin{cases}60=v\cdot t\\60=(v+1)(t-0,1)\end{cases}\ \text{albo}\ \begin{cases}60=v\cdot t\\v+1=\dfrac{60}{t-0,1}\end{cases}\ \text{albo}\ \begin{cases}60=v\cdot t\\t-0,1=\dfrac{60}{v+1}\end{cases}.$$

Pokonanie zasadniczych trudności zadania .... 3 pkt

Sprowadzenie do równania wymiernego z jedną niewiadomą *v* lub *t*, np.:

$$60=(v+1)\left(\frac{60}{v}-0,1\right)\ \text{lub}\ \frac{60}{t}+1=\frac{60}{t-0,1}\ \text{lub}\ t-0,1=\frac{60}{\frac{60}{t}+1}.$$

<u>Uwaga:</u>

Zdający nie musi zapisywać układu równań, może bezpośrednio zapisać równanie z jedną niewiadomą.

Zostały pokonane zasadnicze trudności zadania, ale w trakcie ich pokonywania zostały popełnione błędy rachunkowe, usterki .... 2 pkt

Rozwiązanie zadania do końca lecz z usterkami, które jednak nie przekreślają poprawności rozwiązania (np. błędy rachunkowe) .... 4 pkt

- rozwiązanie równania $60=(v+1)\left(\dfrac{60}{v}-0,1\right)$ z błędem rachunkowym

- rozwiązanie równania $\frac{60}{t}+1=\frac{60}{t-0,1}$ lub $t-0,1=\frac{60}{\frac{60}{t}+1}$ bezbłędnie: $t=-2,4\,\text{h}$ lub $t=2,5\,\text{h}$ i nieobliczenie prędkości
- rozwiązanie równania z niewiadomą t z błędem rachunkowym i konsekwentne do popełnionego błędu obliczenie prędkości

<u>Uwaga</u>
Zdający otrzymuje również 4 pkt za doprowadzenie równania wymiernego do równania kwadratowego:
$v^2+v-600=0$ lub $t^2-0,1t-6=0$
lub za otrzymanie tego równania kwadratowego bezpośrednio z układu równań.

Rozwiązanie bezbłędne .... 5 pkt
Obliczenie średniej prędkości, z jaką jechał kolarz: $v=24$ km/h.